Considere la función $\varphi_e = \varphi_e(r, \psi)$, independiente de z, ahora cuando $n \neq 0$. Todavía la constante de separación $k \equiv 0$ y la ecuación (10) vista antes y repetida aquí, para conveniencia,

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left(k^2 r^2 - n^2 \right) R = 0 \qquad 10$$

se vuelve:

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - n^2 R = 0 \qquad 48$$

Como solución se intenta

$$R(r) = r^{\beta} \qquad 49$$

En la ecuación (49) β se determinará. Cuando se sustituye la ecuación (49) en la ecuación (48) el resultado es

$$(\beta^2 - n^2) r^{\beta} = 0 \qquad 50$$

Para $r \neq 0$, la solución no trivial de la ecuación (50) es

$$\beta = \pm n \qquad 51$$

Así,

$$R(r) = A r^n + B r^{-n} \qquad 52$$

con A y B constantes arbitrarias. La función $\Psi(\psi)$ satisface la misma ecuación diferencial como antes de manera que

$$\varphi_e(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n} \right) \left(C_n \cos k\,\psi + D_n \operatorname{sen} k\,\psi \right) \qquad 53$$

Sea $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ la región donde se desea el potencial. Se asignan las condiciones de borde

$\varphi_e(r, \psi)$ finita en todas partes

$\lim_{r \to \infty} \varphi_e(r, \psi) = 0$

$\varphi_e(r, \psi) = +V_0$ en $(0 \leq \psi \leq \psi)$ y

$$\varphi_e(r,\psi) = -V_0 \quad \text{en} \quad (\pi \leq \psi \leq 2\pi) \qquad 54$$

Se ha definido el problema de obtener el potencial en todos los puntos del espacio cuando un cilindro de radio r_0 y de longitud infinita tenga la distribución de potencial mostrada en la figura 5.

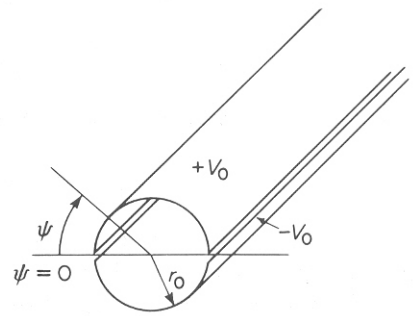

Figura 5.
Problema bidimensional con $\varphi_e = \varphi_e(r,\psi)$.

La condición que $\varphi_e(r,\psi)$ sea finita en $r = 0$ implica que todos los $B_n \equiv 0$. En la región $r_0 \leq r \leq \infty$, el mismo requerimiento conduce a la conclusión que los $A_n \equiv 0$. Además, en $\psi = 0$, $\varphi_e = 0$ ya que a través de la brecha el potencial pasa desde $+V_0$ a $-V_0$. De esta manera, $C_n \equiv 0$. Las soluciones son

$$\varphi_e(r,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n r^n \operatorname{sen} n\psi \qquad \begin{matrix} 0 \leq r \leq r_0 \\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \end{matrix} \qquad 55$$

y

$$\varphi_e(r,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} B'_n r^{-n} \operatorname{sen} n\psi \qquad \begin{matrix} r_0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \end{matrix} \qquad 56$$

En las ecuaciones (55) y (56), $A'_n = A_n D_n$, y $B'_n = B_n D_n$ son arbitrarias. En $r = r_0$, se sabe que el potencial debe ser continuo, una condición no utilizada antes. No se utilizó esta condición a causa de la manera que fueron dadas las condiciones de borde anteriormente. En $r = r_0$, la continuidad de φ_e requiere que

$$\varphi_e(r_0,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n r^n \operatorname{sen} n\psi = \sum_{n=0}^{\infty} B'_n r^{-n} \operatorname{sen} n\psi \qquad 57$$

Al igualar los coeficientes de $\operatorname{sen} n\psi$, se encuentra que

$$B'_n = A'_n r_0^{2n} \qquad 58$$

Queda determinar o las A'_n o las B'_n. Escogiendo el primero y al usar las dos condiciones de borde restantes,

$$\varphi_e(r_0,\psi)=V_0=\sum_{n=0}^{\infty} A'_n r_0^n \operatorname{sen} n\psi \qquad (0\leq\psi\leq\pi) \tag{59}$$

y

$$\varphi_e(r_0,\psi)=-V_0=\sum_{n=0}^{\infty} A'_n r_0^n \operatorname{sen} n\psi \qquad (\pi\leq\psi\leq 2\pi) \tag{60}$$

De la ecuación (59) se hace, como se ha hecho antes,

$$V_0\int_0^{\pi} \operatorname{sen} l\psi\, d\psi=\sum_{n=0}^{\infty} A'_n r_0^n \int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\psi \operatorname{sen} l\psi\, d\psi \tag{61}$$

Una vez más, a menos que $n = l$, la integral de la mano derecha desaparece, de manera que

$$A'_l=\frac{4V_0}{l\pi r^l} \qquad (l \text{ impar})$$

$$A'_l=0 \qquad (\text{si no}) \tag{62}$$

Ahora queda la pregunta, qué significa la condición

$$-V_0=\sum_{n=0}^{\infty} A'_n r_0^n \operatorname{sen} n\psi \qquad (\pi\leq\psi\leq 2\pi), \quad \text{la ecuación (61).}$$

Si al evaluar A'_n de la ecuación (60), se encontrara que fuera diferente que los valores dadas en las relaciones (62) (con $n = l$), significaría que A'_n no fuera constante sobre el rango entero de ψ, y dependería explícitamente de ψ. Sin embargo, al evaluar A'_n, se encuentra que el resultado es exactamente el dado por las relaciones (62).

La ecuación de Laplace - coordenadas esféricas.

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas está dada por

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi_e}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\varphi_e}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial\psi^2}=0 \tag{63}$$

La solución de la ecuación (63) se encuentra en forma el producto

$$\varphi_e(r,\theta,\psi)=R(r)\Theta(\theta)\Psi(\psi) \tag{64}$$

Cada una de las funciones $R(r),\Theta(\theta),\Psi(\psi),$ depende de una sola variable r, θ, ψ, respectivamente más unas constantes. Al sustituir la solución, la ecuación (64), en la ecuación (63), multiplicándose por $r^2 \operatorname{sen}\theta / R\Theta\Psi$, y al transponer el término en Ψ que resulta, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=-\frac{1}{\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\psi^2} \qquad 65$$

Se ve que las variables están separadas de manera que se puede igualar ambos lados a una constante, m^2. Se consigue

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+m^2\Psi=0 \qquad 66$$

Al multiplicar la mano izquierda de la ecuación (65) por $1/(\operatorname{sen}^2\theta)$, resulta

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\,\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \qquad 67$$

En la ecuación (67) las variables una vez más están separadas de manera que cada lado se puede igualar a una constante, λ^2. Entonces queda

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\lambda^2R=0 \qquad 68$$

y

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda^2-\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\Theta=0 \qquad 69$$

La solución de la ecuación (66) ya se conoce:

$$\Psi(\psi)-A\operatorname{sen}m\psi+Bcos\,m\psi \qquad 70$$

En la ecuación (70), m debe ser un entero si $\Psi(\psi)$ es de un valor único.
Quedan las expresiones de las ecuaciones (67) y (68). Se empieza con la ecuación (68).
La solución de (68) puede expresarse como

$$\Theta(\theta)=CP_n^m(\cos\theta) \qquad 71$$

En la ecuación (71), $P_n^m(x)$ es el polinomio de Legendre asociado. Las soluciones dadas en la ecuación (71) son válidas en el rango $0\leq\theta\leq\pi$ si, y sólo si, la constante λ^2 que aparece en la ecuación (69) tenga el valor

$$\lambda^2=n(n+1) \qquad 72$$

con n un entero. Si λ^2 no está dada como la ecuación (72), las expresiones en serie no sólo para los polinomios de Legendre asociados sino también para las soluciones en serie de los polinomios de Legendre en sí mismas son condicionalmente convergentes sólo en el rango $0 \leq \theta \leq \pi$.

Con $\lambda^2 = n(n+1)$, la ecuación (68) es

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)R = 0 \qquad 68a$$

Se intenta una solución $R(r) = r^\beta$. Como $d/dr(r^2 dr^\beta/dr) = \beta(\beta+1)r^\beta$, la ecuación (68a) se convierte en

$$[\beta(\beta+1) - n(n+1)]r^\beta = 0 \qquad 73$$

Para que la ecuación (73) sea satisfecha para todo r, $\beta(\beta+1) - n(n+1) = 0$ debe desaparecer. Las raíces de $\beta(\beta+1) - n(n+1) = 0$ son

$$\beta = +n \qquad 74$$

y

$$\beta = -(n+1) \qquad 75$$

Entonces,

$$R(r) = Dr^n + Er^{-(n+1)} \qquad 76$$

El potencial $\varphi_e(r, \theta, \psi)$ se forma de la suma lineal del producto de las ecuaciones (70), (71) y (76); o sea,

$$\varphi_e(r, \theta, \psi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{n,m} \operatorname{sen} m\psi + B_{n,m} \cos m\psi) \left(C_{n,m} P_n^m(\cos\theta)\right)\left(D_{n,m} r^n + E_{n,m} r^{-(n+1)}\right) \qquad 77$$

Las condiciones de borde se deben especificar para poder evaluar las constantes.

La ecuación de Laplace – coordenadas esféricas – Ejemplos.

(a) Potencial unidimensional - Dependencia radial

Si $\varphi_e = \varphi_e(r)$, la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\,r}\left(r^2\frac{d\,\varphi_e}{d\,r}\right)=0 \qquad \text{78a}$$

o de forma alternativa, a

$$\frac{d}{d\,r}\left(r^2\frac{d\,\varphi_e}{d\,r}\right)=0 \qquad \text{78b}$$

Al integrar una vez, se obtiene

$$\frac{d\,\varphi_e}{dr}=\frac{A}{r^2} \qquad \text{79}$$

mientras que una segunda integración da, con B = -A,

$$\varphi_e(r)=\frac{B}{r}+C \qquad \text{80}$$

Si se requiere que

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_e(r)\to 0,\ \ C\equiv 0,$$

de manera que

$$\varphi_e(r)=\frac{B}{r} \qquad \text{81}$$

la expresión usual, aparte de valor de la constante, para una carga puntual ubicada en el origen.

(b) Potencial unidimensional – Dependencia de ángulo polar

Si $\varphi_e=\varphi_e(\theta)$, la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\,\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\,\varphi_e}{d\,\theta}\right)=0 \qquad \text{82a}$$

o de forma alternativa, a

$$\frac{d}{d\,\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\,\varphi_e}{d\,\theta}\right)=0 \qquad \text{82b}$$

Al integrar la ecuación (82b), se encuentra

$$\frac{d\varphi_e}{d\theta}=\frac{A}{\operatorname{sen}\theta} \qquad 83$$

Al integrar una vez más, el resultado es

$$\varphi_e(\theta)=A\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+B \qquad 84$$

(c)Potenciales bidimensional independientes del ángulo de acimut.

Si el potencial $\varphi_e=\varphi_e(r,\theta)$, entonces la constante m que aparece en la ecuación (77) es igual a cero. Una expresión general para un potencial $\varphi_e(r,\theta)$ es, por lo tanto

$$\varphi_e(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right) \qquad 85$$

Supóngase que todo el espacio se divide en dos regiones al insertar una esfera de radio r_0 en el espacio. Si se requiere que mientras $r\to 0$, el potencial en la región $r < r_0$ se quede finito entonces todos las B_n serían idénticamente cero para $r<r_0$. Si $\lim_{r\to\infty}\varphi_e(r)\to 0$, luego para $r > r_0$, todas las A_n serían cero. Por consiguiente, en problemas electrostáticos de dos dimensiones que involucran una frontera en $r = r_0$, un potencial $\varphi_e(r,\theta)$ que es en todas partes finito y desaparece mientras $r\to\infty$ está dado por

$$\varphi_e(r,\theta)=\sum A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad 0\le r\le r_0 \qquad 86$$

y

$$\varphi_e(r,\theta)=\sum B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta) \quad r_0\le r\le\infty \qquad 87$$

Más aún se sabe que en $r = r_0$, el potencial es continuo. Esto significa que

$$\sum\left(A_n r_0^n-B_n r_0^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta)\equiv 0 \qquad 88$$

Para que la ecuación (88) sea válida para todo θ, es necesario que

$$\left(B_n=A_n r_0^{(2n+1)}\right) \qquad 89$$

Finalmente, para una distribución de potencial prescrita sobre la superficie $r = r_0$, es posible determinar A_n. Supóngase que el potencial sobre la superficie fuese una función prescrita $\varphi_e(r_{0,}\theta)$. Luego, de la ecuación (86)

$$\varphi_e(r_o,\theta)=\sum A_n r_0^n P_n(\cos\theta) \qquad 90$$

Para evaluar A_n, se fija $\cos\theta=x$, se multiplica ambos lados por $P_k(x)$ y se integra sobre le rango $-1<+x\leq 1$, que corresponde a $0\leq\theta\leq\pi$. Se tiene

$$\int_{-1}^{1}\varphi_e(r_0,x)P_k(x)dx=\sum A_n r_0^n\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx \qquad 91$$

Se puede demostrar que

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_k(x)dx \;=\; \begin{matrix} 0 & n\neq k \\ \dfrac{2}{(2k+1)} & n=k \end{matrix} \qquad 92$$

De este modo, las constantes A_n están dadas por

$$A_n=\frac{(2n+1)}{2r_0^n}\int_{-1}^{1}\varphi_e(r_0,x)P_n(x)dx \qquad 93$$

El potencial es, como consecuencia,

$$\varphi_e(r,\theta)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r_0}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta)\int_{-1}^{1}\varphi_e(r_0,x)P_n(x)dx \quad r<r_0 \qquad 94$$

o

$$\varphi_e(r,\theta)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r_0}{r_0}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\int_{-1}^{1}\varphi_e(r_0,x)P_n(x)dx \quad r>r_0 \qquad 95$$

La ecuación de Poissón.

Se recuerda la ecuación de Poissón

$$\nabla^2\varphi_e(\boldsymbol{r})=-\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\epsilon} \qquad 96$$

Como indicado, tanto φ_e como ρ son, en general, funciones del vector posición $\boldsymbol{r}$. Antes de intentar resolver la ecuación (96) directamente, se deriva la expresión para $\varphi_e(\boldsymbol{r})$ al apelar a argumentos físicos. Considere la figura 6. El potencial en el punto P debido a cargas puntuales q_1 y q_2 a distancias R_1 y R_2 respectivamente de P es

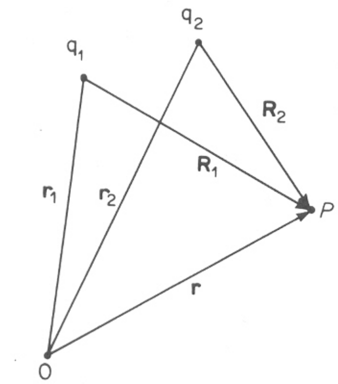

Figura 6.
Para encontrar el potencial debido a dos cargas.

$$\varphi_e(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1(\boldsymbol{r_1})}{R_1}+\frac{q_1(\boldsymbol{r_2})}{R_2}\right)$$

Para n cargas, q_1, q_2, q_3, ..., q_n,

$$\varphi_e(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_1(\boldsymbol{r_i})}{R_i} \qquad 97$$

Si las cargas fueran distribuidas continuamente de manera que

$$q_i(\boldsymbol{r_i})=\rho_i(\boldsymbol{r_i})\Delta V_i \qquad 98$$

cuando $\Delta V_1\rightarrow 0$, la suma de la ecuación (98) se vuelve una integral.

$$\varphi_e(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}'_i)dV}{R} \qquad 99$$

En la ecuación (99) $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. La ecuación (99) es la solución de la ecuación (96). Una derivación más rigurosa es, sin embargo, necesario.